

CLASSIFICAÇÃO DE FIBRADOS VETORIAIS

Marcos Vieira Teixeira



**UNICAMP**

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS**

**INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO**

**CAMPINAS - SÃO PAULO  
BRASIL**

# CLASSIFICAÇÃO DE FIBRADOS VETORIAIS

Marcos Vieira Teixeira

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

ORIENTADOR: Dr. José Carlos de Souza Kiihl.

Durante a realização deste trabalho, o autor teve apoio financeiro da FAPESP e do CAPES.

## A G R A D E C I M E N T O S

Apresentamos os nossos agradecimentos a todas as pes  
soas que contribuíram, de forma direta ou indireta, para a rea  
lização deste trabalho, com destaque:

Ao Prof. e amigo Dr. José Carlos de Souza Kiihl, que  
contribuiu de maneira fundamental, com sua segura orientação.

Ao colega e amigo Tadeu Fernandes de Carvalho, pelas  
oportunas sugestões.

À Marlene, Atsuko e Isabel pelo excelente trabalho de  
datilografia.

Marcos Vieira Teixeira

Ilha Solteira, 1981

## ÍNDICE

	pág.
INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I - ESPAÇOS FIBRADOS	
1. Fibrados: Definição e Exemplos .....	01
2. Fibrados e Equivalências .....	09
CAPÍTULO II - O FIBRADO PRINCIPAL	
3. Fibrado Principal .....	16
4. G-Espaços Principais .....	18
CAPÍTULO III - FIBRADO INDUZIDO	
5. Fibrado Induzido .....	28
6. Aplicações Fibradas .....	31
CAPÍTULO IV - CLASSIFICAÇÃO DE FIBRADOS VETORIAIS	
7. Fibrados Vetoriais .....	35
8. O Teorema de Classificação .....	40
BIBLIOGRAFIA .....	43

Para Silvana, Rosaura e Helvécio.

## INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é demonstrar o Teorema de Classificação de Fibrados Vetoriais que diz: "Existe uma correspondência 1-1 entre as classes de equivalência dos fibrados de K-planos sobre um complexo celular localmente finito K e as classes de homotopia das aplicações  $K \rightarrow BO_K$ ".

No capítulo I é dada a definição de espaço fibrado, é apresentado alguns exemplos que motivam a demonstração de um teorema de existência e um de unicidade de fibrados. Também é introduzido o conceito de equivalência de fibrados de mesma base.

No capítulo II é definido fibrado principal, é demonstrado o teorema de equivalência para G-fibrados principais. - Neste capítulo definimos também G-espço principal e demonstramos que todo G-espço principal é um G-fibrado principal e reciprocamente.

No capítulo III é definido fibrado induzido, aplicação induzida e aplicação fibrada.

Finalmente no capítulo IV definimos fibrado vetorial e demonstramos o "Teorema de Classificação".

Não tentamos fazer um trabalho auto-suficiente, motivo pelo qual usamos alguns resultados da teoria de homotopia - sem demonstrá-los.

## CAPÍTULO I. ESPAÇOS FIBRADOS

## 1. FIBRADOS: DEFINIÇÃO E EXEMPLOS

DEFINIÇÃO 1.0. Um  $G$ -fibrado  $\tilde{E}$  é uma aplicação contínua  $\pi: E \longrightarrow B$ , entre espaços de Hausdorff, juntamente com um espaço  $F$  satisfazendo as seguintes condições:

- (i) para cada  $b \in B$  existe uma vizinhança  $U_\alpha$  de  $b$  e um homeomorfismo.

$$\phi_\alpha: U_\alpha \times F \longrightarrow \pi^{-1}U_\alpha \quad \text{tal que}$$

$$\pi \phi_\alpha(u, v) = u$$

- (ii) existem aplicações contínuas  $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ . Onde  $G$  é um grupo com uma topologia que o faz agir como um grupo de homeomorfismos de  $F$ , com  $g_{\alpha\beta}(p) = \pi_2 \phi_\beta^{-1} \phi_\alpha i_p: F \longrightarrow F$ , onde  $i_p: F \longrightarrow p \times F$  é a inclusão e  $\pi_2: U_\beta \times F \longrightarrow F$  é a projeção. De modo que:

$$1.1a \quad g_{\alpha\alpha}(p) = 1$$

$$1.1b \quad g_{\alpha\beta}(p) = g_{\beta\alpha}^{-1}(p)$$

$$1.1c \quad g_{\alpha\gamma}(p) = g_{\beta\gamma}(p) \cdot g_{\alpha\beta}(p)$$

$$1.1d \quad g_{\alpha\beta}^*: (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$$

$$g_{\alpha\beta}^*(p, \omega) = (p, g_{\alpha\beta}(p)\omega)$$

é contínua.

Usaremos a seguinte terminologia:

$E$  será chamado "espaço total" de  $\pi$

$B$  será chamado "espaço base" de  $\pi$

$\pi$  será chamada "projeção"

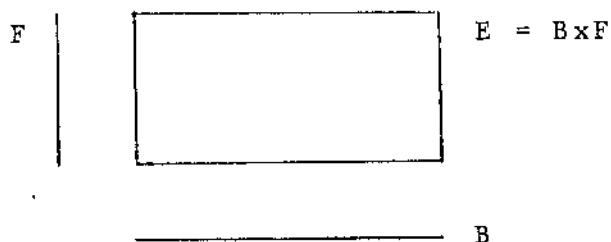
$F$  será chamado "fibra"

$\pi^{-1}(b)$  será chamado "fibra sobre  $b$ "

As aplicações  $g_{\alpha\beta}$  serão chamadas funções de transição.

Exemplo 1.1. Fibrado Produto:  $E = B \times F$ ,  $\pi = \pi_1$

a projeção no primeiro fator. Tomamos  $U = B$ ,  $\phi$  a identidade em  $f$ , e  $g: U \longrightarrow G = \{\text{identidade: } F \longrightarrow F\}$





Exemplo 1.2. Seja  $\pi: E \longrightarrow B$  um  $G$ -fibrado e  $B' \subset B$  um subconjunto de  $B$ . Então se  $\pi' = \pi|_{\pi^{-1}B'}$

$$\pi': \pi^{-1}B' \longrightarrow B'$$

é um  $G$ -fibrado. Denotaremos este fibrado por  $\pi/B'$  e ele é chamado de restrição de  $\pi$  a  $B'$ . Cada fibra  $\pi'^{-1}(b)$ ,  $b \in B'$  é igual a correspondente fibra  $\pi^{-1}(b)$ .

Exemplo 1.3. Fibrado tangente a uma variedade diferenciável.

Seja  $M$  uma variedade diferenciável de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) e dimensão  $n$  e  $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$  atlas de  $M$ . Consideremos  $X = \bigcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^n)$  e definimos a seguinte relação de equivalência em  $X$

$$(x, v)_\alpha = (x, J_{\alpha\beta}(h_\alpha(x))v)_\beta$$

onde  $J_{\alpha\beta}(x)$  é a matriz jacobiana de mudança de coordenadas.

Seja  $T_x M$  o quociente de  $X$  por essa relação de equivalência.  $T_x M$  é chamado espaço tangente a  $M$  no ponto  $x$  e os elementos de  $T_x M$  são classes  $(x, v)_\alpha$  onde  $x \in U_\alpha$  e  $v \in \mathbb{R}^n$ . Consideremos

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M \quad \text{e}$$

$\pi: TM \longrightarrow M$  a projeção tal que

$$\pi(x, v)_\alpha = x$$

Seja  $\psi_\alpha: V_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}U_\alpha$  ( $h_\alpha: U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ )

$$\psi_\alpha(y, v) = [h_\alpha^{-1}(y), v]_\alpha$$

$\psi_\alpha$  é bijeção e assim podemos transportar a topologia de  $V_\alpha \times \mathbb{R}^n$  para  $\pi^{-1}U_\alpha$  tornando  $\psi_\alpha$  um homeomorfismo. Consideremos a topologia em TM como sendo a induzida pelas topologias de  $\pi^{-1}U_\alpha$

Seja  $f_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow V_\alpha \times \mathbb{R}^n$  tal que

$$f_\alpha(x, v) = (h_\alpha(x), v)$$

Assim  $f_\alpha$  é um homeomorfismo

Seja  $\phi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}U_\alpha$

$$\phi_\alpha = \psi_\alpha \circ f_\alpha$$

Assim  $\phi_\alpha$  é um homeomorfismo.

Tomando-se

$$g_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \text{GLn}(\mathbb{R})$$

temos que TM é um  $\text{GLn}(\mathbb{R})$  - fibrado, chamado fibrado tangente à variedade M.

Se M for orientável teremos que  $\det J_{\alpha\beta}(x) > 0$  e assim

$$J_{\alpha\beta} : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \longrightarrow \text{SLn}(\mathbb{R}) \subset \text{Gln}(\mathbb{R})$$

e portanto TM será um  $\text{SLn}(\mathbb{R})$ -fibrado.

Exemplo 1.4. Fibrado dos referenciais sobre M. Seja M uma variedade diferenciável e  $\{(U_{\alpha}, h_{\alpha})\}$  atlas de M. Dado  $b \in M$  um n-referencial sobre M em b é um sistema ortogonal de n vetores tangentes a M em b. Seja  $F^n$  o conjunto dos n-referenciais sobre M. Seja

$$X = \bigcup_{\alpha} (U_{\alpha} \times F^n)$$

A matriz  $J_{\alpha\beta}(x)$  age em  $F^n$  transformando cada vetor do referencial.

$$J_{\alpha\beta}(x) (v^1 \dots v^n) = (J_{\alpha\beta}(x) v^1 \dots J_{\alpha\beta}(x) v^n)$$

Olhando um referencial como uma matriz inversível cujas colunas são os elementos da base,  $J_{\alpha\beta}(x)$  age em  $F^n$  como um produto de matrizes.

Definimos a seguinte relação de equivalência em X.

$$(x, f)_{\alpha} = (y, J_{\alpha\beta}(h_{\alpha}(x))f)_{\beta}$$

Seja FM o espaço quociente de X por essa relação de equivalência. Consideremos a projeção.

$$\pi: FM \longrightarrow M$$

$$\pi((x,f)_\alpha) = x$$

$\pi: FM \longrightarrow M$  é o fibrado dos referenciais sobre  $M$ , onde

$$\phi_\alpha((x,f)_\alpha) = (x,f)_\alpha$$

$$\pi \phi_\alpha (x,f)_\alpha = \pi (x,f)_\alpha = x$$

e

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}) \quad \text{é tal que}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = J_{\alpha\beta}(h_\alpha(x))$$

Assim  $\pi: FM \longrightarrow M$  é um  $GL_n(\mathbb{R})$  - fibrado

Exemplo 1.5. Fibrado das densidades escalares sobre  $M$ .  
Seja  $M$  uma variedade diferenciável e  $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$  atlas de  $M$ .  
(classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ ). Seja

$$X = \bigcup_{\alpha} (U_{\alpha} \times \mathbb{R})$$

Definimos a seguinte relação de equivalência em  $X$

$$(x,t)_\alpha = (x, \det J_{\alpha\beta}(h_\alpha(x))t)_\beta$$

Seja  $DM$  o espaço quociente de  $X$  por essa relação de e quivalência e

$$\pi: DM \longrightarrow M \quad \text{tal que}$$

$$\pi((x, t)_\alpha) = x$$

Como  $\det J_{\alpha\beta} \neq 0$  e  $\tilde{e}$  contínua ela determina um homeomorfismo

$$\det J_{\alpha\beta}: (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R} \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}$$

$$(x, t) \longmapsto (x, \det J_{\alpha\beta}(h_\alpha(x))t)$$

e assim

$$\phi_\alpha: U_\alpha \times \mathbb{R} \longrightarrow \pi^{-1}U_\alpha \quad \text{tal que}$$

$$\phi_\alpha(x, t)_\alpha = (x, t)_\alpha$$

$\tilde{e}$  um homeomorfismo. Além disso

$$g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL_1(\mathbb{R}) \quad \text{tal que}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = \det J_{\alpha\beta}(h_\alpha(x))$$

$\tilde{e}$  contínua.

Portanto  $\pi: DM \longrightarrow M$  é um  $GL_1(\mathbb{R})$ -fibrado chamado fibrado das densidades escalares sobre M.

Exemplo 1.6. Dupla cobertura orientada de M. Seja M uma variedade diferenciável e  $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$  atlas de M. Seja

$$X = \bigcup_{\alpha} (U_{\alpha} \times \{\pm 1\})$$

Definimos a seguinte relação de equivalência em X.

$$(x, t)_{\alpha} = (x, \operatorname{sgn} \det J_{\alpha\beta}(h_{\alpha}(x)) t)_{\beta}$$

A dupla cobertura orientada de M é  $\tilde{M}$  o espaço quociente de X por essa relação de equivalência.

$$\pi: \tilde{M} \longrightarrow M \quad \text{tal que}$$

$$\pi(x, t)_{\alpha} = x$$

é a projeção, e

$$\phi_{\alpha}: U_{\alpha} \times \{\pm 1\} \longrightarrow \pi^{-1} U_{\alpha}$$

$$\phi_{\alpha}(x, t)_{\alpha} = (x, t)_{\alpha}$$

é um homeomorfismo.

$$g_{\alpha\beta}: U_{\alpha} \cap U_{\beta} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\} \text{ tal que}$$

$$g_{\alpha\beta}(x) = \text{sgn det } J_{\alpha\beta}(h_{\alpha}(x))$$

é contínua.

Assim  $\tilde{M}$  é um  $\mathbb{Z}_2$ -fibrado.

## 2. FIBRADOS E EQUIVALÊNCIAS

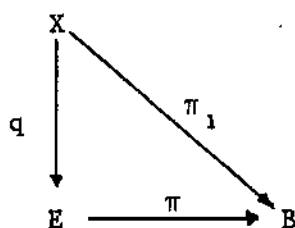
Teorema 2.1. (existência). Dado um espaço  $B$  (Hausdorff), uma cobertura aberta  $\{U_{\alpha}\}$  de  $B$ , e funções  $g_{\alpha\beta}: U_{\alpha} \cap U_{\beta} \longrightarrow G$  satisfazendo 1.1a-d existe um fibrado  $E$  sobre  $B$ , com fibra  $F$  e funções de transição  $g_{\alpha\beta}$ .

Dem: Seja  $X = \bigcup_{\alpha} (U_{\alpha} \times F)$

A união disjunta. As funções  $g_{\alpha\beta}^*$  definem a seguinte relação de equivalência em  $X$ .

$$g_{\alpha\beta}^*(p, \omega) = (p, g_{\alpha\beta}(p)\omega)$$

Seja  $E$  o espaço quociente de  $X$  por essa relação de equivalência e  $q: X \longrightarrow E$  a aplicação quociente. Seja  $\pi_1: X \longrightarrow B$  a projeção no primeiro fator e  $\pi: E \longrightarrow B$  tal que  $\pi \circ q = \pi_1$ .



Como  $\pi_1$  é contínua temos que  $\pi$  é contínua. Desde que cada  $g_{\alpha\beta}^*$  é um homeomorfismo de um aberto de  $U_\alpha \times F$  em um aberto de  $U_\beta \times F$  temos que

$$q/U_\alpha \times F: U_\alpha \times F \longrightarrow \pi^{-1} U_\alpha$$

é um homeomorfismo. Assim basta tomarmos  $\phi_\alpha = q/U_\alpha \times F$

Definição 2.2. Dado um fibrado, se trocarmos a fibra  $F$  por uma nova fibra  $F'$  na qual o grupo  $G$  também age como um grupo de homeomorfismos, e se existem funções  $g'_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$  satisfazendo 1.1a-d então pelo teorema 2.1 podemos construir um novo fibrado. O fibrado assim obtido é dito ser associado com o fibrado dado.

Exemplo 2.3. O fibrado dos referenciais  $FM \longrightarrow M$  (1.4) é um  $GL_n(\mathbb{R})$  - fibrado associado com o fibrado tangente  $TM \longrightarrow M$  (1.3), onde a fibra  $\mathbb{R}^n$  é trocada pela fibra  $F^n$  e  $g_{\alpha\beta} = J_{\alpha\beta}$  age em  $F^n$  como um produto de matrizes, sendo essa ação contínua.

Exemplo 2.4. O fibrado cotangente  $T^*M \longrightarrow M$  é o fibra

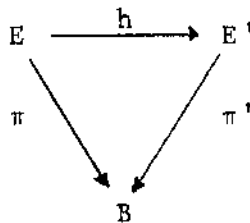


do associado com  $TM \longrightarrow M$  (1.3) cuja fibra é  $\mathbb{R}^n$  e tal que  $g'_{\alpha\beta} = (J_{\alpha\beta}^{-1})^t$  que é um homeomorfismo contínuo pois é a transposição composta com a inversão de matrizes.

Exemplo 2.5. A dupla cobertura orientada  $\tilde{M} \longrightarrow M$  (1.6) é obtida de  $TM \longrightarrow M$  pelo homeomorfismo contínuo.

$$\text{sgn det}: GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$$

Definição 2.6. Dizemos que dois fibrados  $\pi: E \longrightarrow B$  e  $\pi': E' \longrightarrow B$  ambos com fibra  $F$  são equivalentes se existe um homeomorfismo  $h: E \longrightarrow E'$  que preserva as fibras, isto é,  $\pi' \circ h = \pi$



Um fibrado  $\pi: E \longrightarrow B$  é dito ser trivial se for equivalente ao fibrado produto  $\pi_1: B \times F \longrightarrow B$

O teorema a seguir nos dá a unicidade da construção feita em 2.1. a menos de equivalência.

Teorema 2.7. (Unicidade). Sejam  $\pi: E \longrightarrow B$  e  $\pi': E' \longrightarrow B$  fibrados com fibra  $F$ , vizinhanças coordenadas  $\{U_\alpha\}$

e funções de transição  $g_{\alpha\beta}$ . Então eles são equivalentes.

Dem: Sejam

$$\phi_{\alpha}: U_{\alpha} \times F \longrightarrow \pi^{-1}U_{\alpha}$$

e

$$\phi'_{\alpha}: U_{\alpha} \times F \longrightarrow \pi'^{-1}U_{\alpha}$$

Definimos  $h: E \longrightarrow E'$  por

$$h = \phi'_{\alpha} \phi_{\alpha}^{-1} \text{ em } \pi^{-1}U_{\alpha}$$

Assim  $h$  está bem definida pois se  $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$  temos que

$$\phi_{\beta}^{-1} \phi_{\alpha} = g_{\alpha\beta}^* = \phi_{\beta}'^{-1} \phi_{\alpha}'$$

o que implica

$$\phi_{\alpha}' \phi_{\alpha}^{-1} = \phi_{\beta}' \phi_{\beta}^{-1}$$

em  $\pi^{-1}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$ . Além disso como  $\phi_{\alpha}$  e  $\phi'_{\alpha}$  são homeomorfismos temos que  $h$  é um homeomorfismo que preserva as fibras. A aplicação definida por  $\phi_{\beta}' \phi_{\alpha}^{-1}$  em  $\pi'^{-1}U_{\alpha}$  é uma inversa para  $h$ .

Lema 2.8. Dois  $G$ -fibrados  $\pi: E \longrightarrow B$  e  $\pi': E' \longrightarrow B$ , com mesma fibra  $F$ , vizinhanças coordenadas  $\{U_{\alpha}\}$  e  $\{U'_{\beta}\}$  respectiva

mente, são G-equivalentes (equivalentes) se e só se podemos encontrar aplicações

$$\bar{g}_{\alpha\beta}: U_{\alpha} \cap U'_{\beta} \longrightarrow G$$

satisfazendo

$$2.8a \quad \bar{g}_{\alpha\gamma}(p) = \bar{g}_{\beta\gamma}(p) g_{\alpha\beta}(p)$$

$$2.8b \quad \bar{g}_{\alpha\gamma}(p) = g'_{\beta\gamma}(p) \bar{g}_{\alpha\beta}(p)$$

Dem: Inicialmente suponhamos que exista um homeomorfismo  $h: E \longrightarrow E'$  que preserva as fibras e seja

$$\phi_{\alpha}: U_{\alpha} \times F \longrightarrow \pi^{-1}U_{\alpha}$$

$$\phi'_{\beta}: U'_{\beta} \times F \longrightarrow \pi'^{-1}U'_{\beta}$$

Definimos  $\bar{g}_{\alpha\beta}: U_{\alpha} \cap U'_{\beta} \longrightarrow G$  por

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(p) = \pi_2(\phi'_{\beta})^{-1} h \phi_{\alpha} i_p$$

onde  $i_p: F \longrightarrow p \times F$  e  $\pi_2: U'_{\beta} \times F \longrightarrow F$  são respectivamente a inclusão e a projeção no segundo fator e teremos que

$$\bar{g}_{\alpha\gamma}(p) = \pi_2(\phi'_{\gamma})^{-1} h \phi_{\alpha} i_p =$$

$$\begin{aligned}
&= (\pi_2(\phi'_\gamma)^{-1} h \phi_\beta i_p) (\pi_2 \phi_\beta^{-1} \phi_\alpha i_p) = \\
&= \bar{g}_{\beta\gamma}(p) \cdot g_{\alpha\beta}(p) \quad (2.8a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{\alpha\gamma}(p) &= \pi_2(\phi'_\gamma)^{-1} h \phi_\alpha i_p = \\
&= \pi_2(\phi'_\gamma)^{-1} \phi'_\beta i_p \pi_2(\phi'_\beta)^{-1} h \phi_\alpha i_p = \\
&= g'_{\beta\gamma}(p) \cdot \bar{g}_{\alpha\beta}(p) \quad (2.8b)
\end{aligned}$$

Assim  $\bar{g}_{\alpha\beta}(p)$  satisfaz as condições 2.8a e 2.8b.

Suponhamos agora que existam  $\bar{g}_{\alpha\beta}(p)$  satisfazendo 2.8a e 2.8b. Definimos

$$h: E \longrightarrow E' \quad \text{por}$$

$$h\phi_\alpha(p, \omega) = \phi'_\rho(p, \bar{g}_{\alpha\rho}(p)\omega) \quad \text{para } \rho \in U_\alpha \cap U'_\rho$$

$h$  está bem definida, pois se  $p \in U_\beta \cap U'_\sigma$  temos que

$$\phi_\alpha(p, \omega) = \phi_\beta(p, g_{\alpha\beta}(p)\omega) \quad e$$

$$h\phi_\beta(p, g_{\alpha\beta}(p)\omega) = \phi'_\sigma(p, \bar{g}_{\beta\sigma}(p) g_{\alpha\beta}(p)\omega)$$

como

$$\phi'_\rho(p, \bar{g}_{\alpha\rho}(p)\omega) = \phi'_\sigma(p, g'_{\rho\sigma}(p) \bar{g}_{\alpha\rho}(p)\omega)$$

mas de 2.8 a e b temos que

$$\bar{g}_{\beta\sigma}(p) \, g_{\alpha\beta}(p) = g'_{\rho\sigma}(p) \, \bar{g}_{\alpha\rho}(p)$$

Assim  $h$  está bem definida e podemos de maneira análoga construir uma inversa para  $h$ .

## CAPÍTULO II - O FIBRADO PRINCIPAL

3. FIBRADO PRINCIPAL

DEFINIÇÃO 3.1: Um  $G$ -fibrado principal é um fibrado cuja fibra é  $G$ .

Dado um  $G$ -fibrado  $\pi: E \longrightarrow B$ , podemos definir um homomorfismo contínuo  $L: G \longrightarrow H(G)$ ,  $L(g) = L_g$  tal que  $L_g(h) = gh$ , onde  $H(G)$  é o grupo de homeomorfismos de  $G$ . Esta aplicação é injetiva e podemos assim construir um fibrado principal pelo teorema 2.1. O fibrado construído dessa forma é chamado fibrado principal associado a  $\pi: E \longrightarrow B$ .

EXEMPLO 3.2. A dupla cobertura orientada de  $M(1.6)$  é um  $\mathbb{Z}_2$ -fibrado principal.

TEOREMA DA EQUIVALÊNCIA 3.3. Dois  $G$ -fibrados com a mesma base e fibra são  $G$ -equivalentes se e só se seus fibrados principais associados o são.

Dem: Sejam  $\pi: E \longrightarrow B$  e  $\pi': E' \longrightarrow B$   $G$ -equivalentes, então existem aplicações  $\bar{g}_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U'_\beta \longrightarrow G$  satisfazendo 2.8a

e 2.8b. Definimos o homomorfismo contínuo  $L: G \longrightarrow H(G)$  tal que  $L(g) = Lg$ . Então as

$$\bar{g}'_{\alpha\beta} = L \circ \bar{g}_{\alpha\beta}: U_{\alpha} \cap U'_{\beta} \longrightarrow H(G)$$

satisfazem 2.8a e 2.8b, pois

$$\bar{g}'_{\alpha\gamma}(p) = L(\bar{g}_{\alpha\beta}(p)) = L(\bar{g}_{\beta\gamma}(p)g_{\alpha\beta}(p)) = \bar{g}'_{\beta\gamma}(p)g_{\alpha\beta}(p)$$

$$\begin{aligned}\bar{g}'_{\alpha\gamma}(p) &= L(\bar{g}_{\alpha\gamma}(p)) = L(g'_{\beta\gamma}(p) \cdot \bar{g}_{\alpha\beta}(p)) = \\ &= g'_{\beta\gamma}(p) \bar{g}'_{\alpha\beta}(p)\end{aligned}$$

Assim os fibrados principais associados a  $\pi: E \longrightarrow B$  e  $\pi': E' \longrightarrow B$  são  $G$ -equivalentes pelo lema 2.8.

Se os fibrados principais associados são equivalentes, definimos

$$\bar{g}_{\alpha\beta}: U_{\alpha} \cap U'_{\beta} \longrightarrow G$$

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(p) = L^{-1}(\bar{g}'_{\alpha\beta}(p))$$

onde  $L^{-1}(h) = L(h^{-1})$ . Logo temos que as  $\bar{g}_{\alpha\beta}$  satisfazem 2.8a e b e portanto os fibrados  $\pi: E \longrightarrow B$  e  $\pi': E' \longrightarrow B$  são equivalentes.

COROLÁRIO 3.3.1. Um fibrado é trivial se e só se seu

fibrado principal associado é trivial.

#### 4. G-ESPAÇOS PRINCIPAIS

Seja  $\{U_\alpha\}$  cobertura aberta de  $B$  e  $\pi: E \longrightarrow E/G$  tal que  $\pi(x) = xG$ , onde  $G$  age à direita de  $E$ .

DEFINIÇÃO 4.1. Um  $G$ -espaço principal sobre  $B$  é um par  $(E, G)$ , onde  $G$  é um grupo topológico que age à direita de  $E$ , como um grupo de homeomorfismos, cuja ação é livre e tal que:

$$4.1a \quad E/G = B$$

4.1b  $(E, G)$  tem secções locais, isto é, aplicações

$$S_\alpha: U_\alpha \longrightarrow E \text{ com } \pi \circ S_\alpha = 1$$

$$4.1c \quad \text{Se } \sigma: ExG \longrightarrow ExE$$

$$\sigma(x, g) = (x, xg) \quad \text{então}$$

$$\tau: \text{Im} \sigma \longrightarrow G \text{ com } \tau = \pi_2 \sigma^{-1} \text{ é contínua.}$$

EXEMPLO 4.2.  $(B \times G, G)$  é um  $G$ -espaço principal sobre  $B$ , onde a ação de  $G$  sobre  $B \times G$  é dada por



$$((b,g),g') \longmapsto (b,g)g' = (b,gg')$$

Assim todos os elementos da forma  $(b,g)$ , com  $b \in B$  fixo e  $g \in G$ , são equivalentes e portanto temos que

$$B \times G / G = B$$

Além disso podemos definir secções locais  $S_\alpha: U_\alpha \longrightarrow B \times G$  pondo  $S_\alpha(b) = (b,1)$ .

Como  $G$  é um grupo dados  $g, g' \in G$  existe um único  $h \in G$  tal que  $g' = gh$ . Logo

$$\sigma: (B \times G) \times G \longrightarrow (B \times G) \times (B \times G)$$

$$((b,g),g') \longmapsto ((b,g),(b,gg'))$$

é injetora e sobrejetora. Portanto

$$\tau: \text{Im} \sigma \longrightarrow G$$

$$\tau((b,g),(b,g')) = \pi_2 \sigma^{-1}(b,g),(b,g'))$$

$$= \pi_2((b,g), g^{-1}g')$$

$$= g^{-1}g'$$

está bem definida e é contínua.

3957/BC

EXEMPLO 4.3.  $(O_n, O_{n-1})$ , onde  $O_n \subset GL_n(\mathbb{R})$  é o grupo ortogonal, é um  $O_{n-1}$  espaço principal sobre  $S^{n-1}$ .  $O_n$  age sobre  $S^{n-1}$  da seguinte forma:

$$S^n \times O_n \longrightarrow S^{n-1}$$

$$(v, A) \longmapsto A.v$$

Esta ação é transitiva pois dado  $u_1 \in S^{n-1}$  escolhemos  $u_2, \dots, u_n \in S^{n-1}$  tais que  $\{u_1, \dots, u_n\}$  seja uma base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$ . Seja

$$u_i = (u_{1i}, \dots, u_{ni}) = \sum_{j=1}^n u_{ji} e_j$$

onde  $u_{ji} \in \mathbb{R}$ . Então a matriz

$$A = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

é tal que  $A$  é ortogonal e  $\det A = \pm 1$  e portanto  $A \in O_n$  e  $Ae_i = u_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

Assim dados  $u, v \in S^{n-1}$  tomamos  $A$  e  $B \in O_n$  tais que  $Ae_1 = u$  e  $Be_1 = v$ , temos então que  $AB^{-1} \in O_n$  e  $AB^{-1}v = u$ .

Seja  $A = (a_{ij}) \in O_n$  tal que  $Ae_n = e_n$  onde  $e_n = (0, 0, \dots, 1) \in S^{n-1}$ . Temos que

$$Ae_n = \sum_{i=1}^n a_{in} e_i = (0, 0, \dots, 1)$$

Donde segue que  $a_{in} = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n-1$  e  $a_{nn} = 1$ . Além disso como  $AA^t = 1$  temos que  $AA^t e_n = e_n$ , isto é

$$AA^t e_n = \sum_{i=1}^n a_{ni}^2 e_i = (0, \dots, 0, 1)$$

Donde segue que  $a_{ni} = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n-1$  portanto

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ \text{-----} & \vdots \\ 0 & \text{-----} 1 \end{pmatrix}$$

Onde  $\tilde{A} \in O_{n-1}$ . Podemos então identificar  $A$  com  $\tilde{A}$  e dessa forma o subgrupo de  $O_n$  que fixa  $e_n$  é  $O_{n-1}$ . Como  $O_{n-1}$  é um subgrupo fechado de  $O_n$  o espaço  $O_n/O_{n-1}$  é compacto e a aplicação

$$\begin{array}{ccc} O_n/O_{n-1} & \longrightarrow & S^{n-1} \\ A O_{n-1} & \longrightarrow & A e_1 \end{array}$$

é um homeomorfismo. Logo

$$O_n/O_{n-1} = S^{n-1}$$

Podemos construir secções locais pelo processo de Gram-Schmidt. Assim se  $f_1 \in U_1$  uma vizinhança de  $e_1$ , aplicamos o

processo para  $(f_1, e_2, \dots, e_n)$  para obter um novo referencial ortogonal  $(f_1, \dots, f_n)$  que podemos considerar como elemento de  $O_n$ .

Podemos definir  $\tau(A.B) = C$  onde  $C \in O_{n-1}$  é o único elemento tal que  $B = AC$  ou seja  $C = A^{-1}B$ . Disso segue que  $\tau$  é contnua.

EXEMPLO 4.4  $(O_n, O_{n-k})$  é um  $O_{n-k}$  espaço principal sobre  $S_{n,k}$ . Seja  $S_{n,k}$  a variedade de Stiefel dos  $k$ -referenciais no  $\mathbb{R}^n$ .

$$S_{n,k} = \{u = (u_1, \dots, u_k) / k \leq n \text{ e } u_1, \dots, u_k \text{ são ortogonais}\}$$

$O_n$  age em  $S_{n,k}$  da seguinte forma

$$O_n \times S_{n,k} \longrightarrow S_{n,k}$$

$$(A, u) \longrightarrow Au = (Au_1, \dots, Au_k)$$

e essa ação é transitiva.

Seja  $\{e_1, \dots, e_n\}$  a base canônica do  $\mathbb{R}^n$  e  $e = (e_1, \dots, e_k)$ . Assim  $e \in S_{n,k}$ . O subgrupo de  $O_n$  que deixa fixo  $e$  é

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in O_n \right\}$$

Onde  $I$  é a identidade  $k \times k$  e  $B \in O_{n-k}$ . Podemos então identificar  $H$  com  $O_{n-k}$ . Portanto a aplicação

$$\gamma: O_n/O_{n-k} \longrightarrow S_{n,k}$$

$$A \in O_{n-k} \longmapsto Ae$$

está bem definida é injetora e sobrejetora. Colocando-se a topologia quociente em  $S_{n,k}$ , tornamos  $\gamma$  um homeomorfismo e teremos que

$$O_n/O_{n-k} = S_{n,k}$$

Aqui também usamos o processo de Gram-Schmidt para obter secções locais.

Definimos também  $\tau(A,B) = A^{-1}B$ , sendo portanto  $\tau$  contínua.

Observemos que

$$S_{n,i} = O_n/O_{n-1} = S^{n-1}$$

EXEMPLO 4.5. Seja agora  $G_{n,k}$  a variedade de Grassmann dos  $k$ -planos através da origem no  $\mathbb{R}^n$  ( $k \leq n$ ).

Como transformações lineares não singulares levam  $k$ -subespaços em  $k$ -subespaços temos a ação

$$O_n \times G_{n,k} \longrightarrow G_{n,k}$$

$$(A, P) \longrightarrow AP = \{Ax/x \in P\}$$

Que está bem definida e é transitiva. Se  $P_0$  é um  $K$ -plano gerado por  $\{e_1, \dots, e_k\}$  onde  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  então o subgrupo de  $O_n$  que deixa fixo  $P_0$  é

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in O_n; A \in O_k \text{ e } B \in O_{n-k} \right\}$$

Assim  $H$  é subgrupo fechado, de  $O_n$  que pode ser identificado com  $O_k \times O_{n-k}$ . Assim podemos definir a aplicação

$$O_n/O_k \times O_{n-k} \longrightarrow G_{n,k}$$

$$M(O_k \times O_{n-k}) \longrightarrow MP_0$$

que é injetora e sobrejetora. Colocando a topologia quociente em  $G_{n,k}$  temos que

$$O_n/O_k \times O_{n-k} = G_{n,k}$$

assim

$$S_{n,k}/O_k = G_{n,k}$$

Usando o processo de Gram-Schmidt podemos construir secções locais.

Para definir no  $\tau$  procedemos como no exemplo 4.3, isto é, dados  $u \in S_{n,k}$  e  $A \in O_k$  existe uma única matriz  $B \in O_k$  tal que  $Bu = A$ . Definimos então  $\tau(u,A) = B$

TEOREMA 4.6.  $(E,G)$  é um  $G$ -espaço principal sobre  $B$  se e somente se  $\pi: E \longrightarrow B$  é um  $G$ -fibrado principal.

Dem: Seja  $\{U_\alpha\}$  cobertura aberta de  $B$  e  $S_\alpha: U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}U_\alpha$  secções locais. Definimos

$$\phi_\alpha: U_\alpha \times G \longrightarrow \pi^{-1}U_\alpha \quad \text{por}$$

$$\phi_\alpha(b,g) = S_\alpha(b)g$$

assim  $\phi_\alpha$  é continua e

$$\pi\phi_\alpha(b,g) = \pi S_\alpha(b)g = b.$$

uma inversa continua para  $\phi_\alpha$  é

$$\psi_\alpha: \pi^{-1}U_\alpha \longrightarrow U_\alpha \times G$$

$$\psi_\alpha(z) = (\pi z, \tau(S_\alpha \pi z, z))$$

Se  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$  temos que existe  $g \in G$  tal que  $S_\alpha(x)g = S_\beta(x)$ , definimos então  $g_{\alpha\beta}(x) = g$ .

Por outro lado, se  $\pi: E \longrightarrow B$  é um  $G$ -fibrado principal, definimos uma ação  $E \times G \longrightarrow E$ , tal que se  $z = \phi_\alpha(b, g)$

$$zh = \phi_\alpha(b, gh)$$

se  $\phi_\alpha(b, g) = \phi_\beta(b, g')$  então temos que  $g' = g_{\alpha\beta}(b)g$  e portanto

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(b, gh) &= \phi_\beta(b, g_{\alpha\beta}(b)gh) \\ &= \phi_\beta(b, g'h)\end{aligned}$$

logo a ação está bem definida, é livre e contínua. Definimos então  $\tau$  por

$$\tau(\phi_\alpha(b, g), \phi_\alpha(b, g')) = g^{-1}g' \quad \text{em } U_\alpha$$

assim  $\tau$  é contínua. Definimos  $S_\alpha: U_\alpha \longrightarrow \pi^{-1}U_\alpha$  por  $S_\alpha(b) = \phi_\alpha(b, 1)$ . Logo  $S_\alpha$  é contínua e  $\pi S_\alpha(b) = b$ .

DEFINIÇÃO 4.7. Dois  $G$ -espaços principais sobre  $B$ ,  $(E, G)$  e  $(E', G)$  são equivalentes se existe um homeomorfismo  $\psi: E \longrightarrow E'$  que comuta com a ação de  $G$ , e induz a aplicação identidade em  $B$ .

TEOREMA 4.8. (unicidade). Dois  $G$ -espaços principais - são equivalentes se e só se eles são  $G$ -equivalentes como  $G$ -fibrados principais.

Dem: Suponhamos que  $(E, G)$  e  $(E', G)$  sejam  $G$ -espaços prin



cipais, equivalentes, sobre B. Então existe  $\gamma: E \longrightarrow E'$  tal que  $\gamma \circ \pi' = \pi$ . Logo  $\pi: E \longrightarrow B$  e  $\pi': E' \longrightarrow B$  são G-equivalentes.

Agora se  $\pi: E \longrightarrow B$  e  $\pi': E' \longrightarrow B$  são G-equivalentes temos que dadas vizinhanças coordenadas  $\{U_\alpha\}$  e  $\{U'_\alpha\}$  e

$$\phi_\alpha: U_\alpha \times G \longrightarrow \pi^{-1}U_\alpha$$

$$\phi'_\alpha: U'_\alpha \times G \longrightarrow \pi'^{-1}U_\alpha$$

tal que  $\gamma \circ \phi_\alpha = \phi'_\alpha$  temos que se  $z = \phi_\alpha(b, g)$  e  $h \in G$  então

$$\gamma(zh) = \gamma \phi_\alpha(b, gh) = \phi'_\alpha(b, gh)$$

$$= \phi'_\alpha(b, g)h = \gamma(z)h$$

portanto  $\gamma$  comuta com a ação de G. Logo eles são G-equivalentes como G-espacos principais

## CAPÍTULO III - FIBRADO INDUZIDO

5. FIBRADO INDUZIDO

Seja  $\pi: E \longrightarrow B$  um  $G$ -fibrado com fibra  $F$ , vizinhanças coordenadas  $\{U_\alpha\}$  e funções de transição  $g_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ . Seja  $f: B' \longrightarrow B$  uma aplicação contínua.

Consideremos  $U'_\alpha = f^{-1}U_\alpha$  e  $g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \circ f$ . Então temos que

$$g'_{\alpha\beta}: U'_\alpha \cap U'_\beta \longrightarrow G \quad e$$

$$g'_{\alpha\alpha}(p) = g_{\alpha\alpha}f(p) = 1 \quad 1.1a$$

$$g'_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta}f(p) = g_{\beta\alpha}^{-1}f(p) = (g'_{\beta\alpha})^{-1}(p) \quad 1.1b$$

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\gamma}(p) &= g_{\alpha\gamma}f(p) = g_{\beta\gamma}f(p) \cdot g_{\alpha\beta}f(p) \\ &= g'_{\beta\gamma}(p) g'_{\alpha\beta}(p) \end{aligned} \quad 1.1c$$

Se definimos  $g'^*_{\alpha\beta}(p, \omega) = (p, g'_{\alpha\beta}(p)\omega)$  temos que

$$g'^*_{\alpha\beta}: (U'_\alpha \cap U'_\beta) \times F \longrightarrow (U'_\alpha \cap U'_\beta) \times F$$

é contínua.

Assim pelo teorema 2.1 existe um fibrado  $f^*E$  sobre  $B'$

com fibra  $F$  e funções de transição  $g'_{\alpha\beta}$ . O fibrado assim obtido é chamado Fibrado Induzido de  $\pi$  por  $f$ .

Se  $\phi'_\alpha: U'_\alpha \times F \longrightarrow \pi'^{-1}U'_\alpha$  é dada pelo teorema 2.1 podemos definir

$$f^*: f^*E \longrightarrow E$$

$$f^* \phi'_\alpha(b', \omega) = \phi_\alpha(fb', \omega)$$

assim  $f^*$  está bem definida e leva cada fibra em  $f^*E$  homeomorficamente em uma fibra de  $E$ , pois se  $b' \in U'_\alpha \cap U'_\beta$  temos que  $fb' \in U_\alpha \cap U_\beta$  e assim  $\phi_\alpha(fb', \omega) = \phi_\beta(fb', \omega)$ . A aplicação  $f^*$  é chamada aplicação induzida.

A seguir daremos uma definição equivalente de fibrado induzido e aplicação induzida.

DEFINIÇÃO 5.1. Seja  $\pi: E \longrightarrow B$  um  $G$ -fibrado. Dada  $f: B \longrightarrow B'$  uma aplicação contínua. Podemos construir um novo fibrado  $\pi': f^*E \longrightarrow B$  da seguinte forma: Consideremos

$$f^*E = \{ (b', x) \in B' \times E \mid f(b') = \pi(x) \}$$

e  $\pi' = \pi_1$ . Se  $\{U_\alpha\}$  é cobertura de  $B$  então tomamos  $U'_\alpha = f^{-1}U_\alpha$  e

$$\phi'_\alpha: U'_\alpha \times F \longrightarrow G$$

$$\phi'_{\alpha}(b', \omega) = (b, \phi_{\alpha}(f(b'), \omega))$$

Tomamos as funções de transição como sendo  $g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \circ f$ . Assim  $\pi': f^*E \longrightarrow B'$  é um G-fibrado induzido de  $\pi$  por  $f$ .

A aplicação induzida  $f^*: f^*E \longrightarrow E$  é definida como sendo  $\pi_1$ , a projeção no primeiro fator.

Desta forma temos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{f^*} & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

é comutativo e  $f^*$  leva cada fibra de  $f^*E$  homeomorficamente em uma fibra de  $E$ .

Podemos ver então que as duas formas de construção, das anteriormente, de fibrado induzido, dadas acima, são equivalentes.

LEMA 5.2. Seja  $g: B'' \longrightarrow B'$  e  $f: B' \longrightarrow B$  contínuas. Então  $(fg)^*E$  é equivalente a  $g^*f^*E$ .

Dem: Temos que

$$g^*f^*E = \{(b', b, x) \in B' \times f^*E / g(b') = b\} \quad e$$

$$(fg)^*E = \{(b'', x) \in B'' \times E / (fg)(b'') = \pi(x)\}$$

Definimos então  $h: g^* f^* E \longrightarrow (fg)^* E$  por

$$h(b', b, x) = (b', x)$$

$$\begin{array}{ccc} g^* f^* E & \xrightarrow{h} & (fg)^* E \\ \pi_1 \searrow & & \swarrow \pi_1 \\ & B'' & \end{array}$$

temos assim que

$$\pi_1 h(b', b, x) = \pi_1(b', x) = b' = \pi_1(b', x)$$

e assim  $\pi_1 \circ h = \pi_1$ . Além disso  $\tilde{h}$  é homeomorfismo.

## 6. APLICAÇÕES FIBRADAS

DEFINIÇÃO 6.1. Sejam  $E$  e  $E'$   $G$ -fibrados. Uma aplicação que preserva as fibras  $\psi: E \longrightarrow E'$  é uma aplicação contínua tal que  $\psi$  leva cada fibra de  $B$  homeomorficamente em uma fibra de  $B'$ , isto é,  $\psi$  induz uma aplicação contínua  $\bar{\psi}: B \longrightarrow B'$  entre os espaços base, tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\psi} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ B & \xrightarrow{\bar{\psi}} & B' \end{array} \quad \pi' \circ \psi = \bar{\psi} \circ \pi$$

DEFINIÇÃO 6.2. Sejam  $E$  e  $E'$   $G$ -Fibrados. Uma aplicação fibrada ( $G$ -Fibrada) é uma aplicação que preserva as fibras  $\psi: E \longrightarrow E'$  tal que para cada  $b \in B$ , a restrição  $\psi/\pi^{-1}b$  pode ser identificada com um elemento de  $G$ .

Em termos de coordenadas locais temos: se  $b \in U_\alpha \cap \bar{\psi}^{-1}U'_\beta$  então

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(b) = \pi_2(\phi'_\beta)^{-1} \psi \phi_\alpha ib$$

é um elemento de  $G$ .

EXEMPLO 6.3. Quando  $\bar{\psi}$  é a aplicação identidade em  $B$ ,  $\psi$  é um  $G$ -Fibrado isomorfismo e os fibrados são equivalentes (Def. 2.6).

TEOREMA 6.4. Seja  $\psi: E \longrightarrow E'$  uma aplicação  $G$ -Fibrada então  $E$  é equivalente a  $\bar{\psi} * E'$ .

Dem. Sejam  $\{U_\alpha\}$  e  $\{U'_\beta\}$  vizinhanças coordenadas de  $B$  e  $B'$  respectivamente. Então  $\{\bar{\psi}^{-1}U'_\beta\}$  são vizinhanças coordenadas de  $\bar{\psi} * E'$ . Da definição 6.2 temos que  $\bar{g}_{\alpha\beta}(b) = \pi_2(\phi'_\beta)^{-1} \psi_\alpha ib \in G$ . Além disso a aplicação

$$\bar{g}_{\alpha\beta}: U_\alpha \cap \bar{\psi}^{-1}U'_\beta \longrightarrow G$$

Satisfaz 2.8a e b. Portanto pelo lema 2.8  $\tilde{e}$  é equivalente a  $\psi * E'$ . A equivalência  $h$  é dada por  $h(e) = (\pi e, \psi e)$ , e  $h(e) \in \bar{\psi} * E$  pois  $\pi \circ \bar{\psi} = \pi \circ \psi$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 E' & \xrightarrow{\psi} & E & \xrightarrow{h} & \bar{\psi} * E' \\
 \pi' \downarrow & & \downarrow \pi & \nearrow \pi_1 & \\
 B' & \xrightarrow{\bar{\psi}} & B & & 
 \end{array}$$

Reciprocamente se  $E$  é equivalente a  $f * E'$ , se  $h: E \longrightarrow f * E'$  é essa equivalência e  $f*: f * E \longrightarrow E'$  é a aplicação induzida, definimos

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & f * E' & \\
 & & f* & \nearrow & \\
 E' & \xleftarrow{\psi} & E & \xleftarrow{h} & \\
 \pi' \downarrow & & \downarrow \pi & \nearrow \pi_1 & \\
 B' & \xleftarrow{\bar{\psi}} & B & & 
 \end{array}$$

$\psi: E \longrightarrow E'$  por  $\psi = f * h$  e temos que  $\psi$  é uma aplicação fibrada com  $\bar{\psi} = f$ .

**TEOREMA 6.5.** Toda aplicação fibrada  $\psi: E \longrightarrow E'$  induz uma aplicação fibrada  $\psi_p: P \longrightarrow P'$  entre os fibrados principais associados, que cobre  $\bar{\psi}$ . Reciprocamente, uma aplicação fibrada

$\psi_p$  induz uma aplicação fibrada  $\psi$  cobrindo  $\bar{\psi}_p$ .

Dem: As aplicações  $\psi$  e  $\psi_p$  são determinadas por  $\bar{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap \psi^{-1} U_\beta \longrightarrow G$ , como na demonstração do teorema da e quivalência 3.3



## CAPÍTULO IV. CLASSIFICAÇÃO DE FIBRADOS VETORIAIS

## 7. FIBRADOS VETORIAIS

DEFINIÇÃO 7.1. Um fibrado de  $k$ -planos ou fibrado vetorial é um  $GL_k(\mathbb{R})$  fibrado com fibra  $\mathbb{R}^k$  sobre um espaço base paracompacto.

Os exemplos 1.3, 1.4 e 1.5 são exemplos de fibrados vetoriais.

OBSERVAÇÃO 7.2. Observemos que se  $I^n = I \times I \times \dots \times I$  é o cubo  $n$ -dimensional, e  $I_0^{n-1}$  uma face, então é fácil de ver que qualquer aplicação fibrada  $I_0^{n-1} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow I_0^{n-1} \times \mathbb{R}^k$  pode ser estendida a uma aplicação fibrada  $I^n \times \mathbb{R}^k \longrightarrow I^n \times \mathbb{R}^k$ . Usando este resultado indutivamente, sobre os cubos numa partição bem refinada de  $\sigma = I^n$  vemos que qualquer fibrado de  $k$ -planos sobre uma célula  $\sigma$  é trivial.

DEFINIÇÃO 7.3. Dizemos que um espaço paracompacto  $B$  tem dimensão não maior que  $n$ , se qualquer cobertura aberta de  $B$  tem um refinamento aberto tal que nenhum ponto de  $B$  está em mais do que  $n+1$  membros desse refinamento.

Denotaremos por  $E_{q,k}$  o  $\mathbb{R}^k$ -fibrado associado com o  $O_k$ -fibrado principal  $S_{q,k} \longrightarrow G_{q,k}$ .

TEOREMA 7.4. Sejam  $K_0, K$  complexos celulares localmente finitos, com  $K_0$  um subcomplexo de  $K$ . Seja:  $\pi : E \longrightarrow K$  um  $k$ -plano no fibrado, e seja

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1} K_0 & \xrightarrow{\tilde{\gamma}_0} & E_{q,k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_0 & \xrightarrow{\gamma_0} & G_{q,k} \end{array}$$

uma aplicação fibrada. Então nós podemos estender  $\tilde{\gamma}_0$  a uma aplicação fibrada  $\tilde{\gamma} : \pi^{-1} K \longrightarrow E_{q,k}$  desde que toda célula de  $K - K_0$  tenha dimensão menor ou igual a  $q - k$ .

Dem: Seja  $\sigma$  uma célula de  $K - K_0$ . Estenderemos  $\tilde{\gamma}_0$  indutivamente sobre  $\{\pi^{-1}\sigma\}$ . Suponhamos que  $\tilde{\gamma}$  esteja bem definida em  $\pi^{-1}\partial\sigma$ . Então pelo teorema 6.5,  $\tilde{\gamma}/\pi^{-1}\partial\sigma$  pode ser estendida sobre  $\pi^{-1}\sigma$  se e só se a correspondente aplicação entre fibrados principais associados  $\tilde{\gamma}_p/\pi_p^{-1}\partial\sigma : \pi_p^{-1}\partial\sigma \longrightarrow S_{q,k}$  pode ser estendida sobre  $\pi^{-1}\sigma$ . Da observação 7.2 temos que todo fibrado de  $K$ -planos sobre  $\sigma$  é trivial e assim o problema é estender a aplicação fibrada  $\partial\sigma \times O_k \longrightarrow S_{q,k}$  sobre  $\sigma \times O_k$ . Como um  $O_k$ -fibrado principal pode ser visto como um  $O_k$ -espaço principal, uma aplicação fibrada  $\psi : \sigma \times O_k \longrightarrow S_{q,k}$  pode ser escrita como  $\psi(x, g) = \psi'(x)g$  onde  $\psi' : \sigma \longrightarrow S_{q,k}$ . Assim o problema que temos é estender uma aplicação  $\partial\sigma \longrightarrow S_{q,k}$  sobre  $\sigma$  o que sempre pode ser feito pois os grupos de homotopia de  $S_{q,k}$  são triviais desde que  $\dim \sigma \leq q - k$  (ver (3)).

DEFINIÇÃO 7.5. A inclusão  $\mathbb{R}^q \subset \mathbb{R}^{q+1}$  induz as inclusões  $G_{q,k} \subset G_{q+1,k}$  e  $E_{q,k} \subset E_{q+1,k}$ . Assim, seja  $BO_k = \varinjlim_q G_{q,k}$  e  $E_k = \varinjlim_q E_{q,k}$  com a topologia fraca. Temos então que  $n_k : E_k \longrightarrow BO_k$  é um fibrado de k-plano sobre  $BO_k$ , consistindo dos vetores em k-planos em  $E^\infty$ .  $n_k$  é chamado fibrado universal de k-planos, e  $BO_k$  é chamado espaço classificante para o fibrado de k-planos.

No teorema a seguir removeremos a restrição de dimensão do teorema 7.4.

TEOREMA 7.6. Seja  $\pi : E \longrightarrow K$  um k-plano fibrado sobre um complexo celular localmente finito, e seja  $\tilde{\gamma}_0 : \pi^{-1}K_0 \longrightarrow E_k$  uma aplicação fibrada. Então podemos estender  $\tilde{\gamma}_0$  a uma aplicação fibrada  $\tilde{\gamma} : E \longrightarrow E_k$

Dem: Seja  $\sigma$  uma célula de  $K-K_0$ , como  $\pi^{-1}\tilde{\gamma}_0\pi^{-1}\sigma$  é compacto então está em algum  $G_{q,k}$  com  $\dim \sigma \leq q-k$ . Logo aplicando-se o teorema 7.4 temos que a aplicação  $\tilde{\gamma}_0/\pi^{-1}\partial\sigma$  pode ser estendida a  $\tilde{\gamma}_0/\pi^{-1}\sigma$  em  $E_{q,k} \subset E_k$ . Procedendo-se por indução sobre as células de  $K-K_0$  concluímos a demonstração.

LEMA 7.7. Seja  $\pi : E \longrightarrow B$  um k-plano fibrado sobre  $B = B_1 \cup B_2$  com  $B_1 = A \times (a,c)$  e  $B_2 = A \times (c,b)$  e  $a < c < b$ . Se  $\pi/B_1$  e  $\pi/B_2$  são triviais então  $\pi : E \longrightarrow B$  é trivial.

Dem: Sejam as equivalências  $h_1: B_1 \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}B_1$  e  $h_2: B_2 \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}B_2$ . Seja  $g_1 = h_1/(B_1 \cap B_2) \times \mathbb{R}^k$  e  $g_2 = h_2/(B_1 \cap B_2) \times \mathbb{R}^k$ .

$$\begin{array}{ccc}
 (B_1 \cap B_2) \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{f} & (B_1 \cap B_2) \times \mathbb{R}^k \\
 & \searrow g_1 \quad \swarrow g_2 & \\
 & \pi^{-1}(B_1 \cap B_2) &
 \end{array}$$

Então  $f = g_2^{-1} g_1$  é uma equivalência entre fibrados triviais e  $f$  tem a forma  $f(x,y) = (x, u(x)y)$  onde  $(x,y) \in (B_1 \times B_2)$  e  $u: A \longrightarrow GL_k(\mathbb{R})$  é uma aplicação contínua. Nós prolongamos  $f$  a uma equivalência  $w: B_2 \times \mathbb{R}^k \longrightarrow B_2 \times \mathbb{R}^k$  por  $w(x,t,y) = (x,t, u(x)y)$  para cada  $x \in A$ ,  $y \in \mathbb{R}^k$  e  $t \in (c,b)$ . Assim as equivalências  $h_1: B_1 \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}B_1$  e  $h_2 w: B_2 \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}B_2$  coincidem em  $(B_1 \cap B_2) \times \mathbb{R}^k$ , que é fechado. Portanto existe uma equivalência  $h: B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow E$  tal que  $h/B_1 \times \mathbb{R}^k = h_1$  e  $h/B_2 \times \mathbb{R}^k = h_2 w$ .

LEMA 7.8. Seja  $\pi: E \longrightarrow B \times I$  um fibrado de  $k$ -planos, com  $B$  paracompacto. Então existe uma cobertura aberta  $\{U_\alpha\}$  localmente finita, de  $B$  tal que  $\pi/U_\alpha \times I$  é trivial.

Dem: Se  $b \in B$  e  $t \in I$  existe vizinhança aberta  $U_t$  de  $b$  em  $B$  e  $V_t$  de  $t$  em  $I$  tal que  $\pi/U_t \times V_t$  é trivial. Como  $(0,1)$  é compacto existe uma sequência finita  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$  vizinhanças  $U_i$  de  $b$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  em  $B$  tal que  $\pi/U_i \times (t_{i-1} - t_i)$  é trivial se  $1 \leq i \leq n$ . Seja  $U_b \cap = \bigcap_{i=1}^n U_i$ . Logo aplicando-se o lema anterior  $n-1$  vezes temos que  $\pi/U_b \times (0,1)$  é trivial. Como  $B$  é pa

racompacto, dada a cobertura  $\{U_b\}_{b \in B}$  construída da maneira acima, existe um refinamento  $\{U_\alpha\}$  localmente finito.

TEOREMA 7.9. (Milnor) Seja  $r: B \times I \longrightarrow B \times \{1\}$  definida por  $r(b, t) = (b, 1)$ . Seja  $\pi: E \longrightarrow B \times I$  um  $k$ -plano fibrado, com  $B$  paracompacto. Então existe uma aplicação  $G$ -fibrada  $\tilde{r}: E \longrightarrow E$  que cobre  $r$ .

Dem: Do lema anterior temos que existe cobertura aberta, localmente finita  $\{U_\alpha\}$  de  $B$  tal que  $E$  é trivial sobre  $U_\alpha \times I$ . Seja  $\{\psi'_\alpha\}$  uma partição da unidade subordinada a essa cobertura. Seja  $u = \max_\alpha \psi'_\alpha$  e  $\psi_\alpha^{-1}(0, 1) \subset U_\alpha$  e  $\max_\alpha \psi_\alpha = 1$ .

Se  $\phi_\alpha: U_\alpha \times I \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha \times I)$  é uma trivialização local, definimos

$$r_\alpha: B \times I \longrightarrow B \times I$$

$$r_\alpha(b, t) = (b, \max(\psi_\alpha(b), t))$$

e

$$\tilde{r}_\alpha: E \longrightarrow E$$

$$\tilde{r}_\alpha(\phi_\alpha(b, t, w)) = \phi_\alpha(b, \max(\psi_\alpha(b), t), w) \text{ em } U_\alpha \times I \times F$$

$$\tilde{r}_\alpha = 1 \text{ fora de } \pi^{-1}(U_\alpha \times I)$$

Como  $\{U_\alpha\}$  é localmente finita, para cada  $b \in B$  existe vizinhança aberta  $U_b$  de  $b$  em  $B$  tal que  $U_b$  tem intersecção não vazia, apenas com  $U_{\alpha(1)}, U_{\alpha(2)}, \dots, U_{\alpha(n)}$ ; sendo

$\alpha(1) < \alpha(2) < \dots < \alpha(n)$ . Definimos

$$r = r_{\alpha(n)} r_{\alpha(n-1)} \dots r_{\alpha(1)}$$

$$\tilde{r} = \tilde{r}_{\alpha(1)} \tilde{r}_{\alpha(2)} \dots \tilde{r}_{\alpha(n)}$$

Assim se  $\alpha \in \{\alpha(1), \dots, \alpha(n)\}$   $r_\alpha = 1$  em  $U_b \times I$  e  $\tilde{r}_\alpha = 1$

em  $\pi^{-1}(U_b \times I)$ . Portanto temos que a aplicação  $\tilde{r}$  está bem definida, é contínua e cobre  $r$ .

O Teorema 7.9 é também válido no caso de  $\pi$  ser um  $G$ -fibrado e a demonstração é análoga à anterior.

COROLÁRIO 7.10.  $E$  e  $r^*E$  são  $G$ -equivalentes sobre  $B \times I$ .

## 8. O TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO

DEFINIÇÃO 8.1. Duas aplicações  $f_0, f_1: X \longrightarrow Y$  são homotópicas se existe uma aplicação contínua  $f: X \times I \longrightarrow Y$  tal que  $f(x,0) = f_0$  e  $f(x,1) = f_1$ .

LEMA 8.2. Seja  $\pi: E \longrightarrow B$  um  $G$ -fibrado e  $f_0, f_1: K \longrightarrow B$  aplicações homotópicas, com  $K$  paracompacto. Então  $f_0^*E$  e  $f_1^*E$  são  $G$ -equivalentes.

Dem: Seja  $f: K \times I \longrightarrow B$  uma homotopia com  $f(x,0) = f_0$  e  $f(x,1) = f_1$ . Então  $r^*f^*E/\pi^{-1}(K \times 0)$  é  $G$ -equivalente a  $f^*E/\pi^{-1}(K \times 0)$ , onde  $r$  está definida como no teorema de Milnor (7.9). Definimos então  $h_i: K \longrightarrow K \times I$  por  $h_i(x) = (x,i)$  e temos que  $f_i = fh_i$  para  $i = 1,2$ . Assim  $rh_0 = h_1$  e  $f_1^*E$  é  $G$ -equivalente a  $h_1^*f^*E$  e consequentemente  $f_1^*E$  é  $G$ -equivalente a  $h_1^*f^*E$  que por sua vez é  $G$ -equivalente a  $h_0^*r^*f^*E$  que é  $G$ -equivalente a

$h_0^* f^* E$ , que é  $G$ -equivalente a  $f_0^* E$ .

**TEOREMA 8.3.** (Classificação de fibrados vetoriais). Existe uma correspondência 1-1 entre as classes de equivalência dos fibrados de  $k$ -planos sobre um complexo celular localmente finito  $K$  e as classes de homotopia das aplicações  $K \longrightarrow BO_k$ . Essa correspondência associa a cada aplicação  $K \longrightarrow BO_k$  o fibrado induzido do fibrado universal,  $n_k : E_k \longrightarrow BO_k$ , por essa aplicação.

Dem: Como um complexo celular localmente finito é para compacto temos que dado um fibrado de  $k$ -planos  $\pi : E \longrightarrow K$  existe uma aplicação classificante  $\gamma : K \longrightarrow BO_k$  com  $\gamma^*(E_k)$  equivalente a  $E$  (Lema 7.6). Se  $\gamma_0$  e  $\gamma_1 : K \longrightarrow BO_k$  são homotópicas então  $\gamma_0^*(E_k)$  e  $\gamma_1^*(E_k)$  são equivalentes (Lema 8.2).

Finalmente mostremos que fibrados equivalentes tem aplicações classificantes homotópicas. Suponhamos então que  $h : \gamma_0^*(E_k) \longrightarrow \gamma_1^*(E_k)$  é uma equivalência de fibrados. Seja  $p : K \times I \longrightarrow K$  a projeção no primeiro fator. Seja  $E_I = p^* \gamma_0^*(E_k)$ . Definimos o fibrado de  $k$ -planos  $\pi_I : E_I \longrightarrow K \times I$  como o fibrado induzido

$$\begin{array}{ccccc}
 E_k & & & & E_I \\
 n_k \downarrow & & & & \downarrow \pi_I \\
 BO_k & \xleftarrow{\gamma_0} & K & \xleftarrow{p} & K \times I
 \end{array}$$

De  $n_k$  por  $\gamma_0 p$ . Assim  $(\gamma_0)_* : \gamma_0^*(E_k) \longrightarrow E_k$  e  $(\gamma_1)_* h : \gamma_0^*(E_k) \longrightarrow E_k$  definem uma aplicação fibrada  $\pi_I^{-1} (K \times \{0,1\}) \longrightarrow E_k$  e pelo teo

rema 7.6 temos que ela pode ser estendida a uma aplicação fibra da  $f : E_I \longrightarrow E_k$ .

Então a aplicação fibrado  $\tilde{f} : K \times I \longrightarrow BO_k$  induzida

$$\begin{array}{ccc}
 E_I & \xrightarrow{f} & E_k \\
 \pi_I \downarrow & & \downarrow n_k \\
 K \times I & \xrightarrow{\tilde{f}} & BO_k
 \end{array}$$

por  $f$  é uma homotopia entre  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$



## BIBLIOGRAFIA

- (1) J. Milnor, Differential Topology, Princeton University. -  
Lecture Notes (Mimeo).
- (2) R. Thom, Quelques Propriétés Globales des Variétés Différentiables, Comment. Math. Helv. vol. 28. (1954) pp. 17-86.
- (3) J.A.Lees, Notes on Bundles Theory, Aarhus University, -  
Lecture Notes.
- (4) R. Stong, Notes on Cobordism Theory, Princeton University Press.
- (5) D. Husemoller, Fibre Bundles, McGraw-Hill, New York, -  
1966.
- (6) Steenrod, N., Topology of Fibre Bundles, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1951.